

# Theorie der Kristallplastizität

## II. Die Grundstruktur der dichtest gepackten Metalle und ihr Einfluß auf die plastische Verformung

Von A. SEEGER

Aus dem Max-Planck-Institut für Metallforschung, Stuttgart und dem Institut für theoretische und angewandte Physik der Technischen Hochschule Stuttgart

(Z. Naturforschg. 9a, 856—869 [1954]; eingegangen am 2. Juni 1954)

Die in Teil I gegebene allgemeine Diskussion der Kristallplastizität wird durch eine genauere Besprechung der in dichtest gepackten Metallen zu erwartenden Verhältnisse fortgesetzt. Zunächst wird die Frage behandelt, welche Gleitebenen in der Grundstruktur wohl bevorzugt auftreten. Bei den meisten kubisch-flächenzentrierten Metallen wirken Anisotropie und die Möglichkeit zur Dissoziation in Halbversetzungen in der Richtung, daß die  $\{111\}$ -Ebene als Gleitebene bevorzugt sein wird. Dieses Ergebnis ist experimentell prüfbar und scheint durch die bis jetzt vorliegenden vereinzelten Experimente bestätigt zu werden. — Es werden Abschätzungen gegeben für die beim Kreuzen von aufgespaltenen Versetzungen auftretenden Aktivierungsenergien, die — wie in III näher ausgeführt werden wird — die Temperaturabhängigkeit der kritischen Schubspannung bestimmen. Abschließend wird gezeigt, wie sich die beobachteten Unterschiede in der latenten Verfestigung der beiden dichtest gepackten Strukturen als eine Eigenschaft der Grundstruktur deuten lassen.

In Teil I dieser Arbeit<sup>1</sup> sind die Grundzüge einer Theorie der Kristallplastizität entwickelt worden. Es wurde dabei auf die große Bedeutung der Grundstruktur für die bei der plastischen Verformung auftretenden Vorgänge hingewiesen.

Im vorliegenden Teil II sollen nun, nach Möglichkeit quantitativ, die hauptsächlichsten Eigenschaften der Versetzungen in der kubischen und hexagonalen dichtesten Kugelpackung und der von ihnen gebildeten Netzwerke untersucht werden. Es wird sich zeigen, daß sich quantitative Aussagen vor allem hinsichtlich der Aktivierungsenergie beim Schneiden von Versetzungslinien machen lassen. Hier ist ein (in Teil III durchgeführter) Vergleich mit den experimentellen Ergebnissen über die Temperatur- und Geschwindigkeitsabhängigkeit der kritischen Schubspannung und der Verfestigung möglich, der die theoretischen Überlegungen sehr gut bestätigt. Noch direktere Schlüsse hinsichtlich des Aufbaus der Grundstruktur lassen die schon in I, Abschnitt 5 besprochenen Kriechversuche mit logarithmischem Kriechgesetz zu. Obwohl die bis jetzt hierüber bekannten Versuchsergebnisse sehr spärlich sind, scheinen sie doch unsere Auffassung, daß bei der Grundstruktur die Möglichkeit zur Dissoziation in Halbversetzungen eine große Rolle spielen kann, zu bestätigen.

Ein weiterer Punkt, bei dem eine charakteristische Eigenschaft der Grundstruktur wesentlich mitwirken kann, ist die latente Verfestigung von Nebengleitsystemen. Wie in Abschnitt 4 gezeigt werden wird, ist hierbei die Frage nach der Beweglichkeit der Versetzungsknoten wichtig. Die zwischen der hexagonalen dichtesten Kugelpackung und dem kubisch-flächenzentrierten Gitter bestehenden Unterschiede in der latenten Verfestigung lassen sich auf Grund unserer Vorstellungen als eine Folge der verschiedenartigen Beweglichkeit der Knotenpunkte deuten.

### 1. Einfluß der Dissoziation in Halbversetzungen auf die Versetzungsenergie

In diesem Abschnitt wird die energetische Seite der Aufspaltung vollständiger Versetzungen in Teilversetzungen, wie man sie in den  $\{111\}$ -Ebenen des kubisch-flächenzentrierten Gitters und in der Basisebene der hexagonalen dichtesten Kugelpackung anzunehmen hat, behandelt. Wir lehnen uns dabei eng an eine frühere Arbeit<sup>2</sup> an und betrachten zunächst wie dort nur geradlinige Versetzungen. Abweichungen von der Geradlinigkeit werden in späteren Abschnitten dieser Arbeit (insbesondere in Anhang B) besprochen werden.

Seeger und Schöck<sup>2</sup> verwendeten zur quantitativen Behandlung der Aufspaltung ein Variations-

<sup>1</sup> A. Seeger, Z. Naturforschg. 9a, 758 [1954], im folgenden als I bezeichnet.

<sup>2</sup> A. Seeger u. G. Schöck, Acta Met. 1, 519 [1953].



verfahren, bei dem die Weite<sup>3</sup> der Halbversetzungen und ihr halber Abstand  $\eta$  als freie Parameter dienen. Es ergab sich für die Energie der folgende Ausdruck

$$E = \frac{b^2}{4\pi} \frac{1}{K_2} \left[ \ln \frac{L}{2\sigma} - \left( \frac{3-\chi}{12} \right) \ln(1+\varrho^2) \right] + \frac{b^2}{4\pi^2 s_{44}} \frac{\sigma}{c} A(\varrho) + 2\gamma\sigma\varrho \quad (1)$$

$$\text{mit} \quad \varrho = \eta/\sigma. \quad (1a)$$

Die in Gl. (1) verwendeten Symbole haben folgende Bedeutung:  $\chi$  und  $K_2$  sind von Seeger und Schöck<sup>2</sup> angegebene Funktionen der elastischen Konstanten und der kristallographischen Orientierung der Versetzungslinie.  $s_{44}$  ist der Voigtsche elastische Koeffizient in dem hier benützten Koordinatensystem, in dem sich die Versetzungslinie längs der  $z$ -Achse erstreckt und die Richtung der Aufspaltung ( $\eta$ -Richtung) die  $x$ -Richtung ist. Für eine Stufenversetzung in einem isotropen Medium lassen sich diese Größen durch Schubmodul  $G$  und Querkontraktionszahl  $\mu$  folgendermaßen ausdrücken:

$$K_2 = \frac{1-\mu}{G}, \quad \chi = 1-\mu, \quad s_{44} = 1/G. \quad (2)$$

$A(\varrho)$  ist eine zusammen mit

$$B(\varrho) = A(\varrho) - \varrho A'(\varrho) \quad (3)$$

in Abb. 1 dargestellte Funktion. Die analytische Form von  $A(\varrho)$  ist an anderer Stelle gegeben worden<sup>4</sup>. Wir vermerken hier für späteren Gebrauch lediglich, daß

$$A(0) = 2\pi, \quad A'(0) = -2\pi/\sqrt{3} \quad (4a, b)$$

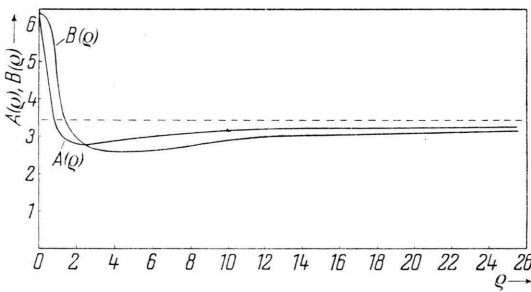


Abb. 1. Verlauf von  $A(\varrho)$  und  $B(\varrho) = A(\varrho) - \varrho A'(\varrho)$ . Beide Kurven nähern sich asymptotisch dem Wert  $A(\infty) = 2\sqrt{3}$ . Aus  $B(\varrho)$  erhält man  $A''(\varrho) = -B'(\varrho)/\varrho$ .

<sup>3</sup> Wir bezeichnen  $\sigma$  hier und in Zukunft als Versetzungsweite, da der Ausdruck Versetzungslänge für die Längserstreckung einer Versetzungslinie zwischen zwei Versetzungsknoten o. ä. verwendet werden wird.

<sup>4</sup> A. Seeger u. G. Schöck<sup>2</sup>, Gl. (A 4).

ist.  $b$  ist der Abstand nächster Nachbarn (im kubisch-flächenzentrierten Gitter  $b = a/\sqrt{2}$ ) und  $c$  der Abstand aufeinanderfolgender dicht gepackter Ebenen (im kubisch-flächenzentrierten Gitter  $c = \sqrt{2/3} b = a/\sqrt{3}$ ).

$\gamma$  ist die spezifische Flächenenergie eines Stapelfehlers. Sie ist bis jetzt nur aus Schätzungen bekannt. Eine kurze Diskussion der zu erwartenden Größenordnungen in verschiedenen Metallen und einer direkten Meßmöglichkeit werden wir unten geben.

$L$  stellt in Gl. (1) wie auch in den folgenden Abschnitten einen aus Konvergenzgründen eingeführten (sehr großen) Abschneideabstand dar.

Das Variationsverfahren liefert für die Versetzungsweite die Gleichung

$$\frac{\partial E}{\partial \sigma} \Big|_{\eta = \text{const}} = \frac{b^2}{4\pi K_2} \frac{1}{\sigma} \left\{ \frac{3-\chi}{6} \frac{\varrho^2}{1+\varrho^2} - 1 \right\} + \frac{b^2}{4\pi^2 s_{44}} \frac{1}{c} B(\varrho) = 0. \quad (5)$$

$\sigma(\varrho)$  ist als Funktion von  $\varrho$  und  $\chi$  bei Seeger und Schöck<sup>2</sup> (Abb. 4) aufgetragen. Den Gleichgewichtsabstand  $2\eta_0$  für die Aufspaltung<sup>5</sup> erhält man mit Hilfe der Gleichung

$$\partial E / \partial \eta \Big|_{\sigma = \text{const}} = 0. \quad (6)$$

Gl. (6) liefert zunächst  $\varrho_0 = \eta_0/\sigma_0$  als Funktion von  $\gamma$  und den elastischen Konstanten des Kristalls, wie früher<sup>2</sup> (Abb. 3) angegeben. Das zugehörige  $\sigma_0$  kann aus Gl. (5) entnommen werden, so daß man  $\eta_0$  auf einfache Weise mit Hilfe der von Seeger und Schöck<sup>2</sup> gegebenen graphischen Darstellungen finden kann.

Nicht so einfach liegen die Verhältnisse dagegen, wenn man die Energie  $E(\eta)$  der Versetzungen pro Längeneinheit für Nichtgleichgewichtsabstände ermitteln will. Eine graphische Darstellung würde wegen der Vielzahl unabhängiger Variablen unübersichtlich werden. Bei der Anwendung auf nichtgeradlinige Versetzungen hat sich die Verwendung einer Interpolationsformel sehr bewährt, die wir nunmehr ableiten werden. Wir betrachten die Funktion

$$f(\zeta) = E(\eta) - E(\eta_0), \quad \zeta = \eta_0 - \eta. \quad (7a, b)$$

<sup>5</sup> Da wir später ausführlich Halbversetzungen betrachten werden, die infolge zusätzlicher Einflüsse nicht den hier eingeführten Gleichgewichtsabstand voneinander haben, bezeichnen wir alle den Gleichgewichtsabstand betreffenden Größen mit einem Index 0.

$f(\zeta)$  soll durch ein Interpolationspolynom vom vierten Grade in  $\zeta$  analytisch dargestellt werden und zwar derart, daß Funktionswert und erste Ableitung für  $\eta=0$  und  $\eta=\eta_0$  sowie die zweite Ableitung für  $\eta=\eta_0$  richtig wiedergegeben werden.

Wir stellen zunächst einmal diese Funktionswerte zusammen. Aus der Definition von  $f(\zeta)$  und von  $\eta_0$  folgt, daß

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = 0 \quad (8), (9)$$

ist. Berücksichtigt man, daß aus Gl. (5)

$$\partial E / \partial \sigma |_{\eta=0} = 0 \quad (10)$$

folgt, so ergibt sich<sup>6</sup>

$$f'(\eta_0) = -\frac{b}{4\pi s_{44}} \cdot \frac{b}{c} \cdot \frac{A'(0)}{\pi} - 2\gamma. \quad (11)$$

Mit Hilfe der Gleichgewichtsbedingung (6) erhält man

$$f(\eta_0) = \frac{b^2}{4\pi K_2} \left\{ \ln \frac{\sigma_0}{\sigma(0)} + \frac{3-\chi}{12} \ln(1 + \varrho_0^2) \right\}. \quad (12)$$

Für die Versetzungsweite bei  $\varrho=0$  wurde in Gl. (12) die Abkürzung

$$\sigma(0) = c s_{44} / 2K_2 \quad (13)$$

eingeführt.

Für  $f''(0)$  ergibt sich schließlich unter Berücksichtigung von Gl. (5) und (6)

$$f''(\eta_0) = \frac{b^2}{4\pi K_2} \frac{1}{\sigma_0^2} \left\{ \frac{3-\chi}{6} \cdot \frac{\varrho_0^2 - 1}{(\varrho_0^2 + 1)^2} + \frac{\sigma_0 A''(\varrho_0)}{2\pi \sigma(0)} \right\}. \quad (14)$$

Das Interpolationspolynom hat die Form

$$f(\zeta) = \left( \frac{\zeta}{\eta_0} \right)^2 \cdot \left\{ A \left( \frac{\zeta}{\eta_0} \right)^2 + 2B \left( \frac{\zeta}{\eta_0} \right) + C \right\} \quad (15)$$

mit

$$\begin{aligned} A &= -3f(\eta_0) + \eta_0 f'(\eta_0) + \frac{1}{2} \eta_0^2 f''(0), \\ B &= 2f(\eta_0) - \frac{1}{2} \eta_0 f'(\eta_0) - \frac{1}{2} \eta_0^2 f''(0), \\ C &= \frac{1}{2} \eta_0^2 f''(0). \end{aligned} \quad (16a-c)$$

Als Zahlenbeispiele behandeln wir Cu und Al, wobei wie früher<sup>2</sup> die in Tab. 1 zusammengestellten Zahlenwerte für die elastischen Konstanten usw. zugrunde gelegt werden.

<sup>6</sup> Auf kubisch-flächenzentriertes Gitter spezialisiert lautet Gl. (11)

$$f'(\eta_0) = -\frac{b}{4\pi s_{44}} \cdot \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \frac{A'(0)}{\pi} - 2\gamma. \quad (11a)$$

Tab. 3 gibt die in den Gln. (16a–c) auftretenden Zahlenwerte an. Aus ihnen kann man einige interessante Ergebnisse über die energetischen Verhältnisse und über die zwischen Halbversetzungen wirkenden Kräfte entnehmen.

	$s_{11}$	$s_{12}$	$s_{44}$	$s_{44}$	$\gamma$ [erg cm <sup>-2</sup> ]	$b$ [Å]
	[10 <sup>12</sup> cm <sup>2</sup> /dyn]					
Cu	14,9	— 6,2	13,3	32,6	40	2,56
Al	15,9	— 5,8	35,2	40,7	200	2,86

Tab. 1. Voigtsche elastische Konstanten  $s_{ik}$  (auf kubische Achsen bezogen) und  $s_{44}$ , Stapelfehlerenergie  $\gamma$  und Atomabstand  $b$  von Cu und Al.

	$K_1$	$K_2$	$\chi$	$\varrho_0$	$\sigma_0$ [Å]	$\eta_0$ [Å]
	[10 <sup>-13</sup> cm <sup>2</sup> /dyn]					
Cu (Sch)	13,1	23,6	1,8	2,2	2,64	6,40
Cu (St)	22,8	13,1	0,6	4,0	3,84	15,36
Al (Sch)	26,3	39,0	1,48	≈ 1	1,43	1,43
Al (St)	39,0	25,0	0,64	≈ 1	2,29	2,29

Tab. 2. Kenngrößen von Schrauben- (Sch) und Stufenversetzungen (St) in Oktaederebenen von Cu und Al.

	$f(\eta_0)$ [10 <sup>-8</sup> dyn]	$f'(\eta_0)$ [dyn/cm]	$f''(0)$ [10 <sup>8</sup> dyn/cm <sup>2</sup> ]	$A$	$B$	$C$
	[10 <sup>-8</sup> dyn]					
Cu (Sch)	1740	802	24,6	416	409	503
Cu (St)	3853	802	6,19	1490	816	730
Al (Sch)	419	390	688	4	145	704
Al (St)	836	390	428	— 494	104	1122

Tab. 3. Die numerischen Werte für die Gln. (16a–c). (Sch) = Schrauben-, (St) = Stufenversetzung.

	$b f(\sigma_0)$ [eV]	$E(0)$ [10 <sup>-8</sup> dyn]	$\varepsilon = f(\eta_0)/E(0)$ [%]
Cu (Sch)	0,278	22 800	7,6
Cu (St)	0,616	34 200	11,2
Al (Sch)	0,0748	15 500	2,7
Al (St)	0,149	22 800	3,7

Tab. 4. Energetische Kerngrößen für dissoziierte Versetzungen in Oktaederebenen.

$b \cdot f(\eta_0)$  ist ein Maß für den bei der Dissoziation in Halbversetzungen zu gewinnenden Energiebetrag pro Netzebene (siehe Tab. 4).

$$\varepsilon = f(\eta_0)/E(0) \quad (17)$$

gibt den relativen Energiegewinn bei dieser Dissoziation an. Dabei ist

$$E(0) = \frac{b^2}{4\pi K_2} \left( \ln \frac{L K_2}{c \cdot s_{44}} + 1 \right) \quad (18)$$

die Energie der unaufgespaltenen Versetzung. Wir setzen in Gl. (18)  $L=10^{-4}$  cm. Man ersieht aus Tab. 3, daß der relative Energiegewinn bei der

Man sieht, daß es eine kritische Stapelfehlerenergie  $\gamma_c = \frac{b}{s_{44}} \frac{\sqrt{2}}{8\pi}$  gibt, oberhalb der keine Aufspaltung mehr stattfindet.  $\gamma_c$  liegt jedoch in der Größenordnung der Energie inkohärenter Korngrenzen oder höher.

Aufspaltung in Halbversetzungen in einem der betrachteten Fälle 10% übersteigt.

$f''(0)$  ist ein Maß für die Schubspannung, die man anwenden muß, um die beiden Halbversetzungen um ungefähr  $b/2$  einander zu nähern oder voneinander zu entfernen. Da  $1 \text{ dyn/cm}^2 \approx 10^{-5} \text{ p/mm}^2$  ist, sieht man, daß diese Schubspannungen im allgemeinen wesentlich höher liegen als die bei Verformungsversuchen an Einkristallen angewendeten. Man kann also wohl für viele Zwecke der Theorie mit Recht annehmen, daß die Halbversetzungen unbeeinflusst von der äußeren Spannung ihren Abstand beibehalten.

Wie sich in Teil III ergeben wird, hat die Aufspaltung in Halbversetzungen einen entscheidenden Einfluß auf die Temperaturabhängigkeit der Verfestigung. Es wäre deshalb sehr erwünscht, genaue Werte für die spezifische Stapelfehlerenergie  $\gamma$  für die verschiedenen dichtest gepackten Metalle zu kennen. Wir haben die in dieser Arbeit und früher<sup>2</sup> verwendeten Zahlenwerte mit einer wohl von Shockley stammenden Näherungsmethode erhalten, welche Stapelfehler zusammen mit kohärenten Zwillingsgrenzen betrachtet und als Maß für deren spezifische Energie die Zahl der Abweichungen von der richtigen Anordnung übernächster Nachbaratome benützt. Auf diese Weise kann man aus Messungen von Zwillingsenergien auf die Zahlenwerte von Stapelfehlerenergien schließen. Bei Al mußte ein geschätzter Wert für die durchschnittliche Korngrenzenenergie zugrunde gelegt werden, da nur Relativmessungen<sup>7</sup> zur Verfügung standen. Deshalb ist für Aluminium  $\gamma$  etwas unsicher. Zum Glück hängen jedoch gerade in dem betreffenden Bereich die Ergebnisse außerordentlich wenig vom genauen Wert der Stapelfehlerenergie ab.

Da einerseits zur Bestimmung von  $\gamma$  nach der eben besprochenen Methode die absolute Messung von Zwillingsenergien erforderlich ist und andererseits deren Interpretation jedoch auf der unsicheren Annahme ruht, daß nur die Anordnung nächster Nachbarn einen merklichen Einfluß auf die Energie habe, liegt es nahe, nach einer direkteren Meßmethode zu suchen. Eine solche ergibt sich, wie an anderer Stelle<sup>8</sup> gezeigt werden wird, aus Messungen der Energie von Kleinwinkelkorngrenzen als Funktion des Korngrenzenwinkels. Wenn

der Versetzungsabstand in der Korngrenze in die Größenordnung  $2\eta_0$  kommt, so ergibt sich ein deutlicher Einfluß der Stapelfehlerenergie auf die Korngrenzenenergie.

Zum Abschluß sei noch kurz diskutiert, in welchen Metallen man besonders niedrige Stapelfehlerenergien zu erwarten hat. Es sind dies die einwertigen Metalle, da in ihnen der Einfluß der Anordnung nächster Nachbarn auf die Energie der Leitfähigkeitselektronen gering ist. Man hat also insbesondere in Au und Cu (und in den Alkalimetallen) ein kleines  $\gamma$  zu erwarten. Eine Sonderstellung nimmt hierbei vielleicht Ag wegen der im Vergleich zu Au und Cu geringeren Polarisierbarkeit des Ionenrumpfes ein. Mit hohen Stapelfehlerenergien muß man in den zwei- und dreiwertigen Metallen rechnen, da ja in ihnen die Elektronenenergie sehr stark von der Lage der Brillouin-Ebenen abhängt. Eine Mittelstellung kommt den Übergangselementen zu. In ihnen wird zwar wegen des homöopolaren Charakters des durch die d-Elektronen vermittelten Bindungsanteils die Energie ebenfalls stark durch die Anordnung nächster Nachbarn beeinflusst, doch ist bei manchen von ihnen (z. B. bei Co) eine Allotropie möglich, die in Richtung auf geringeres  $\gamma$  wirkt.

## 2. Die Struktur des Versetzungsnetzwerkes in dichtest gepackten Kristallen

Eine systematische Diskussion der Anordnung der Versetzungen in unverformten Metallkristallen sollte eigentlich die Theorie des Kristallwachstums zum Ausgangspunkt nehmen. Leider liegt jedoch über die Entstehung von Abweichungen vom idealen Kristallbau als Folge der Wachstumsvorgänge bis jetzt noch kein abgerundetes Bild vor. Eine rasche Entwicklung der Theorie des Kristallwachstums wäre im Interesse eines besseren Verständnisses mancher strukturempfindlicher Eigenschaften sehr erwünscht.

Vorläufig müssen wir uns damit begnügen, die in I dargestellten, für Metalle nicht sehr ergiebigen Untersuchungen über die Versetzungsanordnung in unverformten Kristallen mit theoretischen Überlegungen über die energetischen Verhältnisse und experimentellen Erfahrungen bei der plastischen Verformung zu kombinieren und daraus ein konsistentes Bild abzuleiten versuchen.

<sup>7</sup> R. L. Fullman, J. Appl. Phys. **22**, 448 [1951].

<sup>8</sup> A. Seeger, Conference on Defects in Crystalline Solids, Bristol 1954.

Bis jetzt hat die experimentelle Erfahrung bei der plastischen Verformung noch nicht auf die Notwendigkeit geführt, eine über die kristallographische Anisotropie hinausgehende Abweichung der Versetzungsanordnung von der Isotropie, also eine Wachstumstextur der Grundstruktur, ins Auge zu fassen. Dies kann jedoch daran liegen, daß beim Zugversuch die Wachstumsrichtung gleichzeitig auch als Stabachse ausgezeichnet ist. Vielleicht würden Schubversuche, die ja ganz verschiedene Orientierungen des Gleitsystems relativ zur Wachstumsrichtung zulassen, in der Tat solch eine Textur der Grundstruktur aufdecken. Derartige Versuche wären sehr willkommen, da sie die für die theoretischen Diskussionen immer gemachte Annahme des Fehlens einer Textur zu prüfen gestatten würden.

In I wurde gezeigt, daß man in vielen Fällen mit einem konstanten mittleren Abstand  $l_0$  der Versetzungslinien — als Maschenweite bezeichnet — rechnen darf, und daß es eine große Zahl von Versetzungen gibt, deren Länge zwischen unbeweglichen Knoten — die Maschenlänge — wesentlich größer als  $l_0$  ist. Neben  $l_0$  wurde eine Größe  $l_0'$  eingeführt, die den Abstand derjenigen Versetzungen angab, welche sich als Hindernisse für die Bewegung von Versetzungen in der Hauptgleitebene auswirken. In einfachen Fällen sind dies diejenigen Versetzungslinien, deren Burgers-Vektor eine Komponente senkrecht zur Hauptgleitebene aufweist. Bei kubisch-flächenzentrierten Metallen dagegen liegen die Verhältnisse wesentlich komplizierter. Wir werden den bei ihnen herrschenden Zusammenhang zwischen  $l_0$  und  $l_0'$  unten erörtern.

Nach der allgemeinen räumlichen Struktur des Versetzungsnetzwerks ist die nächstwichtigste Frage diejenige nach Burgers-Vektor und Gleitebene der Versetzungen. Man wird zu ihrer Beantwortung vor allem energetische Gesichtspunkte heranziehen. Eine dabei oft verwendete Faustregel ist, daß die Energie einer Versetzungslinie proportional zum Quadrat ihres Burgers-Vektors  $b$  ist. Mit ihr steht im Einklang, daß bei allen untersuchten Kristalltypen stets jene Gleitrichtungen gefunden wurden, die die kürzesten möglichen Burgers-Vektoren und damit nach obiger Regel die niedrigste Versetzungsenergie ergaben.

Wesentlich schwieriger liegen die Verhältnisse bezüglich der beim Gleiten auftretenden Gleitebenen. Meist werden hier in den einfachen Strukturen die dichtest belegten Netzebenen als Gleitebenen beobachtet. Es sind jedoch Fälle bekannt, bei denen — zumindest bei höherer Temperatur (s. z. B. Al, Mg<sup>9</sup>) — auch weniger dicht belegte Ebenen als Gleitebenen betätigt werden. Eine weitere Schwierigkeit, die z. B. bei den Pyramiden- und Prismenebenen der hexagonalen dichtesten Kugelpackungen auftritt, ist die, daß verhältnismäßig dicht belegte „Ebenen“ nicht eben, sondern gewellt sind, oder — anders ausgedrückt — daß zwei parallele Netzebenen so eng beieinander liegen, daß man im Zweifel ist, ob man sie bei der Berechnung der Belegungsdichte getrennt oder gemeinsam zählen muß<sup>10</sup>. Einen Einfluß auf das Auftreten einer bestimmten Gleitebene kann ferner natürlich die Anisotropie der elastischen Eigenschaften und die in gewissen Ebenen gegebene Möglichkeit zur Dissoziation vollständiger Versetzungen in Halbversetzungen haben.

Die mit der Auswahl der Gleitebenen zusammenhängenden Probleme teilen sich vom Standpunkt der Theorie aus in zwei Gruppen. In die erste Gruppe gehört insbesondere die Frage nach der Energie einer Versetzung als Funktion der kristallographischen Orientierung ihrer Gleitebene. Sie ist in erster Linie dafür maßgebend, ob und gegebenenfalls welche Gleitebenen von den einen gut erhaltenen Kristall durchziehenden Versetzungslinien bevorzugt werden. Davon hängt es wiederum ab, auf welche Art von Hindernissen eine den Kristall durchwandernde Versetzungslinie trifft.

In die zweite Gruppe gehören Fragen wie diejenige, ob bei einer bestimmten Temperatur unter gegebener Spannung eine Versetzung in einer gewissen Gleitebene mit vorgegebener Geschwindigkeit wandern kann, also kurz gesagt die Frage nach der Größe und Temperaturabhängigkeit der Peierls-Kraft als Funktion der Orientierung der Gleitebene. Diesen Problemkreis werden wir hier aus zwei Gründen außer Acht lassen. Erstens kann man die beim Gleiten hauptsächlich betätigten Gleitebenen experimentell feststellen — im Gegensatz zu den Gleitebenen der im Kristallinnern vorhandenen statischen Versetzungen — und zweitens

<sup>9</sup> E. Schmid u. W. Boas, Kristallplastizität, Berlin 1935, S. 90.

<sup>10</sup> Die experimentellen Ergebnisse am Titan scheinen zu beweisen, daß man in den oben erwähnten Fällen die

Netzebenenpaare zu einer einzigen gewellten Gleitfläche zusammenfassen muß (vgl. F. D. Rosi, C. A. Dube u. P. H. Alexander, Trans. Amer. Inst. Min. Metall. Engrs. 197, 257 [1953]).

spielt, wie in Teil I dargelegt worden ist, die Peierls-Kraft bei typischen Metallen, mit denen wir uns hier ausschließlich befassen, im allgemeinen eine untergeordnete Rolle. Eine Ausnahme hiervon ist vielleicht das oben erwähnte Auftreten weiterer Gleitsysteme in Al und Mg bei höheren Temperaturen.

Zur Frage der Abhängigkeit der Versetzungsenergie von der Gleitebenenorientierung liegen Überlegungen von Chalmers und Martius<sup>11</sup> sowie von Nabarro<sup>12</sup> vor. Chalmers und Martius nehmen an, daß es bei dieser Frage vor allem auf

$$\beta = b/c, \quad (19)$$

d. h. auf das Verhältnis von Versetzungsstärke zu Netzebenenabstand ankommt. Nabarro<sup>12</sup> kritisiert diese Auffassung und vertritt die Ansicht, daß die elastische Anisotropie und die Abweichungen vom Peierlsschen Sinusgesetz die Hauptrolle spielen. Wir haben in Anhang A ein Beispiel untersucht und dabei folgendes gefunden: Zweifellos können die Kräfte zwischen benachbarten Netzebenen starke Abweichungen vom Sinusgesetz zeigen. Setzt man jedoch nicht willkürlich ein solches Sinusgesetz an, sondern führt, wie Leibfried und Dietze<sup>13</sup>, eine mit der Kristallsymmetrieverträgliche Fourier-Entwicklung durch, von der nur die durch die elastischen Eigenschaften vollkommen bestimmten Glieder beibehalten werden, so hat man bereits einen wesentlichen Teil der Abweichungen vom Sinusgesetz und insbesondere die Möglichkeit zur Dissoziation in Halbversetzungen berücksichtigt.

Die Anisotropie hat in kubischen Kristallen einen geringen Einfluß auf das Spannungsfeld der Versetzungen, d. h. auf die Größen  $K_i$ . Dies stimmt vollkommen überein mit einer Näherungstheorie von Leibfried<sup>14</sup>, die für die wichtigsten Spannungskomponenten von Versetzungen in kubischen Metallen das gleiche Ergebnis liefert. Die Anisotropie hat dagegen wegen der wesentlich stärkeren Orientierungsabhängigkeit des Voigtschen Koeffizienten  $s_{44}$  einen merklichen Einfluß auf die Versetzungsweite  $\sigma_i$ , die außerdem noch von  $\beta$  abhängt.

Das oben skizzierte modifizierte Peierlssche Verfahren, das — wie schon gesagt — nicht nur den

Einfluß des Netzebenenabstandes, sondern auch der elastischen Anisotropie und der Packungsdichte der Gleitebenen zu berücksichtigen gestattet, wurde in Anhang A auf die Gleitebene  $\{100\}$  kubisch-flächenzentrierter Metalle angewendet und mit den in Abschnitt I auf analoge Weise erhaltenen Ergebnissen für die  $\{111\}$ -Ebene verglichen. Das Ergebnis ist, daß selbst bei Vernachlässigung der Möglichkeit zur Dissoziation in Halbversetzungen bei fast allen kubisch-flächenzentrierten Metallen die  $\{111\}$ -Ebene energetisch ausgezeichnet ist. Eine mögliche Ausnahme bildet hierbei Aluminium, bei dem die beiden Ebenen (wiederum unter Vernachlässigung der Aufspaltung) fast gleichberechtigt und erst die höher indizierten Gleitebenen energetisch wesentlich ungünstiger sind.

Versetzungen bilden sich während des Wachstums — außer durch Kondensation von Leerstellen — vor allem, um die von Konzentrations- und Temperaturgradienten herrührende Inkohärenz zwischen verschiedenen Kristallbereichen (z. B. den Dendritenästen) in energetisch günstiger Weise zu überbrücken. Nach dem oben Gesagten muß man annehmen, daß es dabei für eine Versetzungslinie in einem kubisch-flächenzentrierten Kristall energetisch günstiger ist, abschnittsweise in  $\{111\}$ -Ebenen zu verlaufen und dabei Verlängerungen in Kauf zu nehmen, als eine wenig mit Atomen belegte Gleitebene zu haben. Für die weitere Diskussion werden wir dementsprechend voraussetzen, daß alle Versetzungen in  $\{111\}$ -Ebenen liegen und daß dabei die möglichen Burgers-Vektoren  $a/2 \langle 110 \rangle$  alle mit gleicher relativer Häufigkeit auftreten. Eine experimentelle Nachprüfung dieser Annahme ist vor allem bei Aluminium, bei dem sie wohl nicht allzu gut erfüllt ist, erwünscht. In Abschnitt 3 werden wir Experimente besprechen, die vielleicht einen gewissen Aufschluß hierüber geben können.

Wir werden nunmehr den oben erwähnten Zusammenhang zwischen  $l_0$  und  $l_0'$  untersuchen. Die Dichte der eine  $\{111\}$ -Ebene durchstoßenden Versetzungen sei  $\rho$ . Diese Versetzungen können drei verschiedenen  $\{111\}$ -Ebenen angehören. Da von den drei möglichen Burgers-Vektoren in einer dieser Oktaederebenen nur einer in der  $\{111\}$ -

<sup>11</sup> B. Chalmers u. U. M. Martius, Proc. Roy. Soc. A **213**, 175 [1952].

<sup>12</sup> F. R. N. Nabarro, Adv. Physics **1**, 259 [1952].

<sup>13</sup> G. Leibfried u. H. D. Dietze, Z. Phys. **131**, 113 [1952].

<sup>14</sup> G. Leibfried, Z. Phys. **135**, 23 [1953].

Ebene liegt, weisen insgesamt  $\frac{2}{3}$  aller die  $\{111\}$ -Ebene durchstoßenden Versetzungen einen Burgers-Vektor mit einer Komponente parallel zu  $\{111\}$  auf. Das restliche Drittel erzeugt keinen Sprung in einer schneidenden Versetzung mit der Gleitebene  $\{111\}$ . Es kann jedoch ebenfalls Hindernisse für die  $\{111\}$ -Versetzungen bilden und zwar deswegen, weil beim Kreuzen ein Sprung in den geschnittenen, die  $\{111\}$ -Ebene durchstoßenden Versetzungen gebildet wird. Dies ist nur bei jenem Drittel nicht der Fall, dessen Gleitebene den Burgers-Vektor der schneidenden Versetzung enthält. Zwischen der Gesamtdichte  $\varrho$  und der Dichte  $\varrho'$  der Hindernisse bildenden Versetzungen besteht also der Zusammenhang

$$\varrho' = \frac{8}{9} \varrho. \quad (20)$$

Hieraus ergibt sich mit

$$\varrho \sim l_0^{-2} \quad (21)$$

die in I für Aluminium benützte Beziehung

$$l'_0 = 1,06 l_0. \quad (22)$$

Bei diesen Überlegungen wurde die Dissoziation vollständiger Versetzungen vernachlässigt. Sie kann, wie in Abschnitt 3 gezeigt werden wird, die soeben abgeleiteten Resultate etwas ändern. Für die Frage, ob eine bestimmte Kombination von sich kreuzenden Versetzungen als Hindernis wirkt oder nicht, kommt es darauf an, ob die wandernde Versetzung an der betreffenden Kreuzungsstelle festgehalten und erst durch thermische Schwankungen wieder befreit wird oder ob sie das Hindernis vermöge ihrer kinetischen Energie überwinden kann. Gerade auf diesen Punkt hat die Dissoziation einen wesentlichen Einfluß.

In hexagonal dichtestgepackten Metallen sind die Versetzungen mit Versetzungsstärke  $a$  (Abstand nächster Nachbarn in der Basisebene) gegenüber denjenigen mit Versetzungsstärke  $c$  (Höhe der hexagonalen Zelle) energetisch bevorzugt. Wie aus der in Teil III gegebenen Interpretation der Experimente an hexagonalen Metallen hervorgeht, ergibt sich in Übereinstimmung mit der obigen Überlegung für die in Richtung der  $c$ -Achse verlaufenden Versetzungslinien eine um etwa  $10^{-1}$  geringere Dichte als in kubischen Metallen. Für die Dichte der in der Basisebene liegenden Versetzungen mit Versetzungsstärke  $a$  muß man dagegen wohl mit derselben Dichte wie in kubischen Metallen, also  $\varrho \approx 10^8 \text{ cm}^{-2}$ , rechnen.

### 3. Kreuzen von Versetzungen und Kriechen kubisch-flächenzentrierter Einkristalle

In Abschnitt 2 wurde die Struktur des Versetzungswerks in kubisch-flächenzentrierten und hexagonal dichtest gepackten Kristallen diskutiert. Im letztgenannten Gitter besteht wegen der verschiedenen Versetzungsstärke ein deutlicher energetischer Unterschied zwischen  $a$ - und  $c$ -Versetzungen. Die  $c$ -Versetzungen können als Gleitebenen nur die hexagonalen Prismenebenen haben, in denen eine Dissoziation in Halbversetzungen nicht möglich ist. Vom geometrischen Standpunkt aus sind als Gleitebenen der  $a$ -Versetzungen eine große Zahl von Netzebenen denkbar. Da man für die Stapelfehlerenergie in Zn und Cd etwa dieselbe Größenordnung wie für Al zu erwarten hat und somit die Dissoziation in Halbversetzungen eine merkliche Energieerniedrigung gibt, kann man auch hier mit einer deutlichen Bevorzugung der Basisebene rechnen.

Es wäre sehr erwünscht, wenn man experimentell entscheiden könnte, ob in der Tat die Mehrzahl der Versetzungslinien in  $\{111\}$ - bzw.  $\{0001\}$ -Ebenen verlaufen. Eine solche Möglichkeit bieten Messungen, bei denen das Kreuzen von Versetzungslinien eine wesentliche Rolle spielt. Hierher gehören die Temperaturabhängigkeit der kritischen Schubspannung und der Verfestigung, über die in Teil III gesprochen werden wird, sowie die in I, Abschnitt 5, behandelten Kriechprozesse. In kubisch-flächenzentrierten Metallen eignet sich besonders das logarithmische Kriechen für derartige Untersuchungen, da in der in I, Gl. (27 b), gegebenen Formel

$$\alpha = \frac{1}{\vartheta} \frac{kT}{bd l'_0} \quad (23)$$

der „Durchmesser“  $d$  der die Hauptgleitebene durchsetzenden Versetzungslinien eingeht. Für undissoziierte Versetzungen hat man näherungsweise

$$d = b \quad (24)$$

zu erwarten ( $b$  bedeutet hier den Abstand benachbarter Atome). Dies trifft z. B. bei den  $c$ -Versetzungen der hexagonalen dichtesten Kugelpackung zu, so daß die Versuche an hexagonalen Metallen in Teil III mit Hilfe von Gl. (24) ausgewertet werden. Komplizierter liegen die Verhältnisse bei aufgespaltenen Versetzungen. Hier hat man als Durchmesser der Versetzung in der Aufspaltungsrichtung, wie in I, Gl. (24) geschehen,

$$d = 2 \eta_0 + b \quad (25)$$

einzusetzen. Gl. (25) gilt jedoch nur dann, wenn die aufgespaltene Versetzung in Richtung der Aufspaltung durchgeschnitten wird. Bei schrägem Schneiden ist das in Gl. (23) einzusetzende  $d$  entsprechend kleiner. Außerdem hängt  $d$  noch vom Charakter der Versetzungslinie ab, und zwar in dem Sinne, daß sich für Schraubenversetzungen aus Gl. (25) ein kleinerer Wert für  $d$  ergibt als für Stufenversetzungen. Nach Seeger und Schöck<sup>2</sup> ist der hieraus fließende Unterschied bei Al wohl vernachlässigbar gering, so daß es nicht überrascht, daß Gl. (23) gut bestätigt wird. Anders liegen die Verhältnisse bei Cu. Hier verhalten sich  $d_{\text{Schraube}}$  und  $d_{\text{Stufe}}$  wie 1:2, so daß die in I abgeleitete einfache Formel für das logarithmische Kriechen eigentlich nicht gelten sollte. Zur Klärung dieser Frage sind am Institut für theoretische und angewandte Physik der Technischen Hochschule Stuttgart Kriechmessungen an Kupfereinkristallen begonnen worden. Es ist beabsichtigt, Kristalle zu verwenden, die etwa dieselbe Versetzungsdichte aufweisen wie Aluminiumkristalle. Dies läßt sich bei vergleichbarer Vorbehandlung an Hand der kritischen Schubspannung kontrollieren. Aus den beobachteten Verfestigungskurven und Kriechgeschwindigkeiten kann man dann auf die relative Größe von  $d$  in Cu und Al schließen und damit eine Aussage darüber machen, ob in der Tat, wie in dieser Arbeit aus allgemeinen theoretischen Überlegungen heraus angenommen wurde, in flächenzentriert-kubischen Metallen die Mehrzahl der Versetzungslinien in  $\{111\}$ -Gleitebenen verläuft.

Über Versuche dieser Art wurde schon früher von Neurath und Koehler<sup>15</sup> berichtet. Diese Autoren fanden in der Tat bei Kupfer bei Raumtemperatur und bei der Temperatur der flüssigen Luft, bei Blei jedoch nur bei der tieferen Temperatur, logarithmisches Kriechen. Die Versuche wurden ebenfalls mit stufenweiser Belastung durchgeführt, doch sind leider die gemessenen Konstanten  $\alpha$  im logarithmischen Kriechgesetz in der Arbeit nicht angegeben. Die einzige reproduzierte Kriechkurve ergibt (bei  $T = 296^\circ \text{K}$ )

$$\alpha = 1,5 \cdot 10^{-5}. \quad (26)$$

Aus dem Text kann man schließen, daß dieser Wert zu einem Kristall mit einem Verfestigungskoeffizienten  $8,8 \cdot 10^8 \leq \theta \leq 16,3 \cdot 10^8 \text{ dyn/cm}$  (27)

gehört haben muß. Legt man den größeren (im Sinne eines möglichst großen  $d$  ungünstigeren) der beiden Werte zugrunde, so erhält man

$$d \cdot l_0' = 6,5 \cdot 10^{-11} \text{ cm}^2. \quad (28)$$

Der größtmögliche Wert für  $d = 2\eta_0 + b$  ist (vgl. I. c.<sup>2</sup>)

$$d = 13b = 3,3 \cdot 10^{-7} \text{ cm}, \quad (29)$$

so daß sich

$$l_0' = 2 \cdot 10^{-4} \text{ cm} \quad (30)$$

ergibt. Dieser Wert ist recht plausibel und (wegen der verhältnismäßig hohen kritischen Schubspannung der verwendeten Kristalle) eher etwas größer als man erwarten sollte. Man kann somit sagen, daß dieser vereinzelte Versuch auf alle Fälle für ein großes  $d$  und damit für unsere Auffassung von der Bedeutung der Versetzungsdissoziation spricht<sup>15a</sup>.

Obwohl von zahlenmäßig geringem Einfluß, geht in die Auswertung dieser Versuche der Unterschied zwischen  $l_0$  und  $l_0'$  ein. In I wurde angegeben, daß man für Cu

$$l_0 = l_0' \quad (31)$$

zu setzen habe. Der Unterschied zum Aluminium beruht auf folgendem: Da zumindest die gleitende, sehr wahrscheinlich auch die statische Versetzung des sich kreuzenden Paares in einer  $\{111\}$ -Ebene liegt, hat eine Dissoziation in Halbversetzungen stattgefunden, die beim Schneiden zunächst rückgängig gemacht werden muß (Abb. 2). Würden sich die beiden Stapelfehler gegenseitig durchdringen, so würde dies nämlich auf eine energetisch äußerst ungünstige Atomanordnung führen.

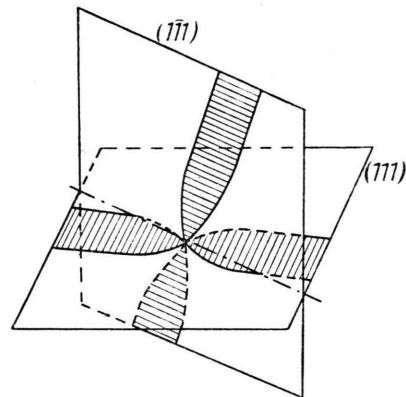


Abb. 2. Kreuzen zweier in  $\{111\}$ -Ebenen gelegenen dissoziierter Versetzungen. Die Stapelfehlerbänder sind schraffiert gezeichnet.

<sup>15</sup> P. W. Neurath u. J. S. Koehler, J. Appl. Phys. **22**, 621 [1951].

<sup>15a</sup> Seit Abfassung des Manuskripts wurde eine quantitative Bestätigung dieser Auffassung in unveröffentlichten Messungen von D. W. Parkin gefunden (siehe

I, I. c.<sup>49a</sup>), welche Gl. (23) an Cu-Schmelzfluß-Einkristallen bestätigten und für  $dl_0'$  einen um eine Größenordnung größeren Wert ( $dl_0/b \approx 14 \cdot 10^{-4} \text{ cm}$ ) als bei Al-Einkristallen ergaben, welche unter vergleichbaren Bedingungen gewachsen waren.

Man benötigt also für das Kreuzen zweier Versetzungslinien im Falle der Oktaedergleitung sowie der Basisgleitung bei Zn, Cd usw. stets eine Aktivierungsenergie. Wir haben in Anhang B den zum Zusammenbiegen der Halbversetzungen erforderlichen Energiebetrag pro vollständige Versetzungslinie abgeschätzt und dafür

$$\begin{aligned} 4 E &= 0,84 \text{ eV} && (\text{Schraubenversetzung Cu}) \\ &= 3,9 \text{ eV} && (\text{Stufenversetzung Cu}) \\ &= 0,1 \text{ eV} && (\text{Schraubenversetzung Al}) \\ &= 0,18 \text{ eV} && (\text{Stufenversetzung Al}) \end{aligned} \quad (32)$$

gefunden. Man darf annehmen, daß für Cu und Al die Energie des eigentlichen Sprunges von der Größenordnung  $\frac{1}{4}$  eV ist (sie hängt vom Charakter der sich schneidenden Versetzungen ab), während sie in den hexagonalen Metallen im allgemeinen rund doppelt so groß sein wird<sup>8</sup>. Der Unterschied zwischen dem kubischen und dem hexagonalen Gitter rührt davon her, daß bei letzterem der Sprung von einer Basisebene zur übernächsten führt und deshalb rund doppelt so lang wie in Cu oder Al ist.

Für Cu und wohl auch für Au spielt es hinsichtlich der Aktivierungsenergie also praktisch gar keine Rolle, ob beim Kreuzen von Stufenversetzungen ein Sprung gebildet wird oder nicht. Die Aktivierungsenergie ist hier im wesentlichen durch die Stapelfehlerenergie bestimmt und so groß, daß sie nicht durch die kinetische Energie der Versetzungen aufgebracht werden kann. Dies bedeutet, daß, wie in Gl. (31) angenommen, jede kreuzende Versetzung als Hindernis wirkt. Anders dagegen bei Al, Cd, Zn. Hier ist die Energie des eigentlichen Sprunges größer als der Beitrag der Dissoziation. Letzterer ist nicht sehr genau bekannt, doch ist es wahrscheinlich, daß er beim Auftreffen einer Versetzung auf eine andere, kreuzende Versetzung von äußerer Spannung und kinetischer Energie der Versetzung ohne Mitwirkung thermischer Schwankungen aufgebracht werden kann. In diesen Fällen sind in  $l_0'$  nur jene Kombinationen von kreuzenden Versetzungen mitzuzählen, die wirklich zur Sprungbildung führen. Auf diese Weise wird man auf die in Abschnitt 2 für Aluminium durchgeführte Abzählung sowie auf die Identifizierung von  $l_0'$  mit dem Abstand der c-Versetzungen in der hexagonalen dichtesten Kugelpackung geführt.

Wie oben ausgeführt worden ist, kann man die hier besprochenen Verhältnisse zum Teil durch

Kriechversuche experimentell weiter untersuchen. Das Hauptanwendungsgebiet dieser Vorstellungen ist jedoch die Temperatur- und Geschwindigkeitsabhängigkeit der Kristallplastizität unterhalb der Erholungstemperatur, die in Teil III besprochen werden wird. Leider hat die obige Diskussion ergeben, daß die Verhältnisse in den kubisch-flächenzentrierten Metallen besonders kompliziert sind. Die Aktivierungsenergie für das Kreuzen zweier Versetzungen hängt im allgemeinen davon ab, ob nur in einer oder in beiden der beteiligten Versetzungen ein Sprung gebildet wird. Die Energie der Sprünge kann je nach Orientierung und Charakter der Versetzungen verschieden sein. Hinzu kommt noch, daß der „Versetzungsdurchmesser“  $d$  ebenfalls im allgemeinen nicht konstant ist, sondern von der Orientierung der Versetzung abhängt. Man muß somit für die theoretische Behandlung dieser Fragen ein stark vereinfachtes Modell zugrunde legen.

Glücklicherweise vereinfachen sich für die hexagonalen Metalle, für die die ausführlichsten Messungen vorliegen, die Verhältnisse außerordentlich. Der für die Temperaturabhängigkeit maßgebende Prozeß ist hier die Bildung von Sprüngen in a-Versetzungen des Basisgleitsystems beim Schneiden von c-Versetzungen. Der Durchmesser der c-Versetzungen ist wegen der fehlenden Aufspaltung von der Orientierung unabhängig. Die Energie des Sprunges selbst wird bei den hexagonalen Metallen (mit Ausnahme von Kobalt) nur wenig vom Charakter der schneidenden Versetzung beeinflusst. Man findet in der Tat an Hand einer Analyse der empirischen Ergebnisse, daß die Annahme einer einheitlichen Aktivierungsenergie  $U_0$  und eines einheitlichen Versetzungsdurchmessers  $d$  eine gute Näherung ist. Dies spricht dafür, daß die Bildung von Sprüngen in c-Versetzungen wohl keine große Rolle spielt, d. h., daß die c-Versetzungen bevorzugt längs der hexagonalen Achse verlaufen und deshalb Schraubencharakter haben.

#### 4. Beweglichkeit der Versetzungsknoten und latente Verfestigung

Eine weitere Eigenschaft der Grundstruktur, die noch der Diskussion bedarf, ist die Beweglichkeit oder Unbeweglichkeit der Versetzungsknoten. Diese Frage ist für das kubisch-flächenzentrierte Gitter durch Thompson<sup>16</sup> ausführlich behandelt

<sup>16</sup> N. Thompson, Proc. Phys. Soc. B, Lond. **66**, 481 [1951].

worden. Wir werden finden, daß die Verhältnisse bei der hexagonal dichtesten Kugelpackung ganz anders als beim kubisch-flächenzentrierten Gitter liegen.

Bei der erstgenannten Struktur hat man zwei unabhängige Netzwerke für die *a*-Versetzungen und für die *c*-Versetzungen. Dies rührt davon her, daß es nicht möglich ist, die Burgers-Vektoren einer *a*-Versetzung und einer *c*-Versetzung so zu addieren, daß sich eine stabile Versetzung ergibt. Wir können uns auf die Diskussion des *a*-Netzwerkes beschränken, da die *c*-Versetzungen nur als statische Hindernisse wirken,

Wie schon oben dargelegt, darf man annehmen, daß die *a*-Versetzungen bevorzugt in der Basis-ebene verlaufen. Treffen dabei drei in derselben Ebene verlaufende Versetzungslinien zusammen, so bilden sie einen Knoten, der jedoch in der Basis-ebene in beliebiger Richtung beweglich ist. Solche Knoten sind z. B. sicher in der von Li, Edwards, Washburn und Parker<sup>17</sup> durch Eindringen eines Stempels in einen Zinkeinkristall erzeugten Substruktur enthalten.

Wird ein hexagonaler Kristall auf Einfachgleitung beansprucht, so verschieben sich die Knoten in der Weise, daß die Länge der Versetzungen im Hauptgleitsystem vergrößert und diejenige der Versetzungen in den beiden latenten Gleitsystemen vermindert wird. Schon bei kleinen Abgleitungen muß dies dazu führen, daß die latente Verfestigung die Verfestigung im Hauptgleitsystem übertrifft, und zwar wegen der Verkürzung der Länge der Frank-Read-Quellen der latenten Systeme. Edwards, Washburn und Parker<sup>18</sup> haben in der Tat beobachtet, daß bei Abgleitungen von der Größenordnung  $\alpha = 0,05$  die latente Verfestigung von Zink etwa das Doppelte der Verfestigung im Hauptgleitsystem beträgt.

Dieser Befund stellt u. E. den einzigen bis jetzt bekannten Fall dar, in dem sich die kritische Länge einer Frank-Read-Quelle in einem meßbaren Effekt äußert. Für die Richtigkeit unserer Auffassung spricht in erster Linie die Tatsache, daß es in einem reinen Metall keine andere Möglichkeit zur Erklärung des oben genannten Meßergebnisses zu geben scheint. Man überzeugt sich leicht davon, daß Spannungsfelder von Versetzungen auf das

eigene Gleitsystem immer stärker verfestigend wirken als auf ein latentes System. Während jedoch in kubischen Kristallen eine zusätzliche latente Verfestigung in Nebengleitebenen durch die Verkleinerung des Versetzungsabstandes im Hauptgleitsystem und damit durch Vermehrung der Hinderniszahl im Nebengleitsystem möglich ist, ist dies bei hexagonalen Metallen ausgeschlossen. Es bleibt somit, wenn nicht eine Wirkung von Verunreinigungen vorliegt, nur die obige Erklärung.

Für die Diskussion der Verhältnisse in kubisch-flächenzentrierten Metallen nehmen wir wie Thompson<sup>16</sup> an, daß alle Versetzungen in  $\{111\}$ -Ebenen verlaufen. Je nach der gegenseitigen Orientierung der drei an einem Knoten zusammentreffenden Gleitebenen ist dieser entweder in einer Ebene, längs einer Geraden oder gar nicht beweglich. Der letzte Fall liegt dann vor, wenn alle drei Gleitebenen voneinander verschieden sind. In diesem Fall kann sich der Knoten nur noch durch Diffusion oder aber durch Quergleitung (cross-slip) einer der drei Versetzungslinien fortbewegen. Zu letzterem ist jedoch erforderlich, daß eine der drei Versetzungen eine Schraubenversetzung ist, daß die Spannungsverhältnisse in deren Quergleitebene günstig sind und daß die in manchen Fällen (z. B. Cu) sehr große Aktivierungsenergie für cross-slip aufgebracht werden kann. Alles dies erfordert ein so unwahrscheinliches Zusammentreffen günstiger Umstände, daß man derartige Versetzungsknoten bei mäßig hohen Temperaturen wohl als unbeweglich ansehen darf.

#### Anhang A: Der Einfluß der Orientierung der Gleitebene auf die Versetzungsenergie

Wir behandeln hier als Beispiel die energetischen Verhältnisse von Stufen- und Schraubenversetzungen in der  $\{100\}$ -Ebene von kubisch-flächenzentrierten Kristallen, welche ja nach der  $\{111\}$ -Ebene die dichtest gepackte Netzebene und gleichzeitig diejenige mit dem nächstgrößten  $\beta$ -Wert ist. Wie schon in Abschnitt 2 erwähnt, verwenden wir dabei unter voller Berücksichtigung der Anisotropie das von Leibfried und Dietze<sup>13</sup> bestimmte Potential im Peierlsschen Modell.

Der Burgers-Vektor sei  $b = a/2 [1\bar{1}0]$ , die Gleitebene (*x-z*-Ebene) sei (001). Die Richtung der Stufenversetzung ist dann  $[110]$ , diejenige der Schraubenversetzung  $[1\bar{1}0]$ . In beiden Fällen soll die Richtung der Versetzungslinie die *z*-Richtung sein. Da diese eine zweizählige Achse ist, ist die Bedingung<sup>19</sup> dafür er-

<sup>17</sup> C. H. Li, E. H. Edwards, J. Washburn u. E. R. Parker, *Acta Met.* **1**, 223 [1953].

<sup>18</sup> E. H. Edwards, J. Washburn u. E. R. Par-

ker, *Trans. Amer. Inst. Min. Metall. Engrs.* **197**, 1525 [1953].

<sup>19</sup> A. Seeger u. G. Schöck<sup>2</sup>, Gl. (7).

füllt, daß man Stufen- und Schraubenversetzungen für sich allein behandeln kann. Außerdem ist aber noch die  $x$ -Achse eine zweizählige Achse, so daß nach Seeger und Schöck<sup>2</sup> die Säkulargleichungen für die Spannungsfunktionen  $F$  und  $\Phi$  sich getrennt behandeln lassen und nur lineare und quadratische Glieder in  $\kappa^2$  enthalten, was ihre Lösung sehr erleichtert.

Wir bezeichnen wie früher<sup>2</sup> die auf kubische Achsen bezogenen Voigtschen elastischen Koeffizienten mit  $s_{ik}$ , die auf das oben beschriebene  $x$ - $y$ - $z$ -System bezogenen dagegen mit  $s_{ik}$ . Das Schema der Koeffizienten in dieser Aufstellung hat die folgende Gestalt:

$$(s_{ik}) = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & s_{22} & s_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & & s_{11} & 0 & 0 & 0 \\ & & & s_{44} & 0 & 0 \\ & & & & s_{55} & 0 \\ & & & & & s_{44} \end{pmatrix}. \quad (\text{A } 1)$$

Es gilt

$$\begin{aligned} s_{11} &= \frac{1}{2} s_{11} + \frac{1}{2} s_{12} + \frac{1}{4} s_{44}, \\ s_{22} &= s_{11}, \\ s_{12} &= s_{12}, \\ s_{13} &= \frac{1}{2} s_{11} + \frac{1}{2} s_{12} - \frac{1}{4} s_{44}, \\ s_{44} &= s_{44}, \\ s_{55} &= 2(s_{11} - s_{12}). \end{aligned} \quad (\text{A } 2)$$

Mit den Abkürzungen

$$S_{hi} = s_{hi} s_{33} - s_{h3} s_{i3} \quad (\text{A } 3)$$

lauten die Säkulargleichungen für  $\kappa^2$  im Falle der Stufenversetzung

$$S_{11} \kappa^4 + (2S_{12} + S_{66}) \kappa^2 + S_{22} = 0. \quad (\text{A } 4)$$

Die Gleichung

$$z^4 + pz^2 + q = 0 \quad (\text{A } 5)$$

besitzt unter der Voraussetzung

$$p, q > 0, \quad p^2 - 4q < 0 \quad (\text{A } 6)$$

die Lösungen

$$\begin{aligned} z &= \sqrt[4]{q} \cdot e^{\pm i\psi/2 - in\pi}, \\ \cos \psi &= -\frac{p}{2\sqrt{q}} \quad (n=0,1; \quad 0 \leq \psi \leq \pi). \end{aligned} \quad (\text{A } 7)$$

Gl. (A 4) habe die Wurzeln

$$\kappa = \pm \kappa' \pm i \kappa''. \quad (\text{A } 8)$$

Dann ist nach Gl. (A 7) die im folgenden allein benötigte positive Größe  $\kappa''$  durch

$$\kappa'' = \sqrt[4]{q} |\sin \psi/2| = \sqrt{\frac{1}{2} (\sqrt{q} + p/2)} \quad (\text{A } 9)$$

gegeben mit

$$q = S_{22}/S_{11}, \quad (\text{A } 9a)$$

$$\begin{aligned} p &= (2S_{12} + S_{66})/S_{11} \\ &= 2(s_{11} + s_{12})/(s_{11} + s_{12}), \end{aligned} \quad (\text{A } 9b)$$

$$S_{11} = (s_{11} + s_{12}) \cdot s_{44}/2, \quad (\text{A } 9c)$$

$$S_{22} = s_{11} \cdot s_{11} - s_{12}^2. \quad (\text{A } 9d)$$

Im Falle der Schraubenversetzung lautet die Säkulargleichung

$$\kappa^2 S_{55} + S_{44} = 0 \quad (\text{A } 10)$$

mit den Wurzeln

$$\kappa = \pm i \kappa_3 = \pm i \sqrt{s_{44} \cdot s_{55}}. \quad (\text{A } 11)$$

Wie von Seeger und Schöck<sup>2</sup> gezeigt wurde, kann man den elastischen Beitrag zur Versetzungsenergie  $E_{el}$  durch zwei Konstanten  $K_1$  und  $K_2$  ausdrücken, die sich aus den oben eingeführten Größen folgendermaßen ergeben:

$$K_1 = 2S_{11} \kappa''/s_{11}, \quad (\text{A } 12)$$

$$K_2 = s_{55} \kappa_3'' = \sqrt{s_{44} \cdot s_{55}}. \quad (\text{A } 13)$$

In den von Leibfried und Dietze<sup>13</sup> aus dem Peierlschen Modell abgeleiteten Gleichungen hat man, um der Anisotropie Rechnung zu tragen, im Ausdruck für den elastischen Energieanteil  $E_{el}$

$$G/(1-\mu) \text{ durch } 1/K_1 \quad (\text{A } 14)$$

$$\text{und } G \text{ durch } 1/K_2, \quad (\text{A } 15)$$

bei der Berechnung der Wechselwirkungsenergie  $E_{AB}$  jedoch

$$G \text{ durch } 1/s_{44} \quad (\text{A } 16)$$

zu ersetzen.

Die Peierlssche Integralgl. lautet dann für die Stufenversetzung ( $c$  = Netzebenenabstand; für  $\{100\}$ -Ebene  $c = a/2$ ;  $a$  = Würfelkante):

$$\sin 4\pi \frac{u_A(x)}{b} = \frac{2c s_{44}}{K_1 b} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u_A'(\xi)}{\xi - x} d\xi; \quad (\text{A } 17)$$

für die Schraubenversetzung

$$\sin 4\pi \frac{w_A(x)}{b} = \frac{2c s_{44}}{K_2 b} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{w_A'(\xi)}{\xi - x} d\xi. \quad (\text{A } 18)$$

Die Einzelversetzungen entsprechenden Lösungen sind

$$\left. \begin{aligned} u_A(x) \\ w_A(x) \end{aligned} \right\} = -\frac{b}{2\pi} \arctg \frac{x}{\sigma} \quad \text{mit} \quad \begin{cases} \sigma_1 = c s_{44}/2K_1, \\ \sigma_2 = c s_{44}/2K_2. \end{cases} \quad (\text{A } 19)$$

Es ergibt sich<sup>20, 21</sup>

$$E_{el} = \frac{b^2}{4\pi K_i} \ln \frac{L}{\sigma_i}, \quad (\text{A } 20)$$

$$E_{AB} = \frac{1}{s_{44}} \frac{b^2}{4\pi} \frac{2\sigma_i}{c} = \frac{1}{4\pi} \frac{b^2}{K_i}. \quad (\text{A } 21)$$

Genau dieselben Gleichungen gelten, wie sich aus den in Abschnitt 1 mitgeteilten Ergebnissen entnehmen läßt, auch dann, wenn man Versetzungen mit der Gleitebene  $\{111\}$  betrachtet und annimmt, daß die Stapel-

<sup>20</sup> Die zur Energieberechnung benützten Gleichungen seien der Vollständigkeit halber für die Stufenversetzung angeführt:

$$E_{el} = -\frac{1}{\pi K_1} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u_A(x) u_A'(\xi)}{\xi - x} dx d\xi, \quad (\text{A } 20a)$$

$$E_{AB} = \frac{1}{4\pi^2 s_{44}} \frac{b^2}{c} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(1 + \cos \frac{4\pi u_A(x)}{b}\right) dx. \quad (\text{A } 21a)$$

<sup>21</sup> In Gl. (A 20) ist  $L$  die übliche, zur Konvergenzerzeugung bei der Integration über  $\xi$  in (A 20a) eingeführte Größe.

fehlerenergie so groß ist, daß keine Aufspaltung in Halbversetzungen stattfindet. In der Gleichung für die Versetzungsweite  $\sigma_i$  [Gl. (A 19)] hat man jedoch

$$c = a/\sqrt{3} \quad (\text{A } 22)$$

sowie die auf das gedrehte Koordinatensystem bezogenen elastischen Größen einzusetzen. Die Versetzungsweite wurde in diesem Fall nicht aus einer strengen Lösung der Peierlsschen Gleichungen, sondern aus einem Variationsansatz gewonnen, doch sollte dies keinen großen Fehler in der Gesamtenergie nach sich ziehen.

Richtung der Versetzungslinie		[110]	$[\bar{1}\bar{1}0]$	$[\bar{1}\bar{1}2]$
Cu	$K_1$	12,2	13,1	22,8
	$K_2$	23,7	23,6	13,1
Al	$K_1$	24,6	26,3	39,0
	$K_2$	39,1	39,0	25,0

Tab. 5. Koeffizienten  $K_i$  (in  $10^{-13}$  cm<sup>2</sup>/dyn) für verschiedene Gleitebenen  $\{001\}$  u.  $\{111\}$  und gleichen Burgers-Vektor  $\mathfrak{b} = a/2 \cdot [\bar{1}\bar{1}0]$

In Tab. 5 sind für Cu und Al Zahlenwerte für  $K_i$  angegeben (Rechenschiebergenauigkeit). Man sieht, daß sich  $K_i$  mit der Orientierung nur wenig ändert, so daß die Versetzungsenergie verhältnismäßig stark durch  $\sigma_i$  (im Glied  $E_{el}$ ) beeinflusst wird. Bei gleichbleibender Orientierung ist  $\sigma_i$  proportional dem Netzebenenabstand  $c$ ; da jedoch in den meisten Metallen  $s_{44}$  stark von der Orientierung abhängt, darf man den Einfluß der Anisotropie auf  $\sigma_i$  auch bei kubischen Kristallen nicht vernachlässigen.

Für Cu, bei dem  $s_{44}$  stark von der Orientierung abhängt und das in dieser Hinsicht typisch für die kubisch-flächenzentrierten Metalle ist, ist die Energie einer unaufgespaltenen Versetzung mit Gleitebene  $\{111\}$  wegen der starken Änderung von  $\sigma_i$  um etwa 10% kleiner als für die Gleitebene  $\{100\}$ . Hierzu kommt noch die Wirkung der Aufspaltung, die einen Beitrag derselben Größenordnung gibt. Bei dem eine Ausnahmestellung einnehmenden Al ist wegen des fehlenden Anisotropieeinflusses der energetische Unterschied zwischen den niedrig indizierten Gleitebenen  $\{111\}$ ,  $\{100\}$  und  $\{110\}$  wesentlich geringer. Erst bei höher indizierten Ebenen macht sich die Verkürzung von  $\sigma_i$  mit Verringerung des Netzebenenabstandes bemerkbar.

Zusammenfassend kann man sagen, daß bei kubischen Metallen die Orientierungsabhängigkeit von  $K_i$  außerordentlich gering ist und einen sehr kleinen Einfluß auf die Versetzungsenergie hat. Man kann daraus folgern, daß durch Korngrenzen in kubischen Metallen nur geringe und praktisch wohl zu vernachlässigende Bildkräfte auf Versetzungen ausgeübt werden, da ja dafür in erster Linie die Orientierungsabhängigkeit von  $K_i$  maßgebend ist. Vergleicht man Netzebenen miteinander, bei denen der Netzebenenabstand  $c$  deutlich (etwa um einen Faktor 2 oder 3) verschieden ist, so gibt bei geringer Anisotropie die dadurch bewirkte Änderung der Versetzungsweite den Hauptausschlag. Bei starker Anisotropie hat man bei der Bestimmung der Versetzungsweite die Orientierungsabhängigkeit

von  $s_{44}$  zu berücksichtigen. Bei allen kubisch-flächenzentrierten Metallen geht dieser Einfluß in Richtung auf eine Begünstigung der  $\{111\}$ -Gleitebene gegenüber der  $\{100\}$ -Gleitebene. Lediglich bei Al sind diese beiden Gleitebenen (bei Vernachlässigung der Aufspaltung) wegen des geringen Unterschiedes im Netzebenenabstand ( $c_{111} = 1,15 c_{100}$ ) etwa gleichberechtigt. Man muß also erwarten, daß bei Al bei der Temperatur des Schmelzpunkts ein merklicher Teil der Versetzungslinien  $\{100\}$ - und  $\{110\}$ -Ebenen als Gleitebenen wählt. Auf diese Weise wäre zu verstehen, warum nicht auch bei anderen kubisch-flächenzentrierten Metallen bei höherer Temperatur diese Gleitebenen beobachtet werden.

Wir haben hier durchweg nur das erste Glied der Fourier-Entwicklung des Potentials zweier Netzebenen berücksichtigt. Man darf jedoch annehmen, daß die Berücksichtigung höherer Glieder in allen Fällen in derselben Richtung (nämlich auf eine Abflachung des Potentialverlaufs gegenüber der Sinuskurve hin) wirkt, so daß die obige Diskussion der Verhältnisse dadurch nicht wesentlich geändert würde.

#### Anhang B: Die Aktivierungsenergie beim Kreuzen aufgespaltenen Versetzungslinien<sup>22</sup>

In diesem Anhang soll abgeschätzt werden, wie stark die Aktivierungsenergie für das Kreuzen zweier Versetzungslinien dadurch beeinflusst wird, daß in dicht belegten Gleitebenen eine Aufspaltung der vollständigen Versetzungen in Halbversetzungen stattgefunden hat. Eine in jeder Hinsicht befriedigende Berechnung dieser Aktivierungsenergie wäre sehr schwierig. Wir machen deshalb eine Reihe von Vereinfachungen: Die Energie pro Längeneinheit als Funktion des Abstandes der Halbversetzungen voneinander wird durch die in Abschn. 1 abgeleitete Interpolationsformel dargestellt. Die bei der Verbiegung der Halbversetzungen zu leistende Arbeit berechnen wir so, als ob jeder Versetzungslinie eine einheitliche Linienenergie  $E_L$  zukommen würde. Außerdem werden wie in der Theorie der schwingenden Saite höhere Potenzen der Neigung der Versetzungslinien vernachlässigt werden, so daß man die verwendete Näherung als „Saiten-Näherung“ kennzeichnen kann. Die Lösung des Problems enthält als Parameter die noch unbekannte Linienenergie  $E_L$ , die dann aus der Geometrie der Versetzungsanordnung näherungsweise bestimmt wird.

Wir behandeln jede der beiden kreuzenden Versetzungen unabhängig voneinander und nehmen an, daß das Zusammenbiegen der Halbversetzungen an der Kreuzungsstelle in der in Abb. 3 angegebenen symmetrischen Weise erfolgt. Dies ist sicher nicht streng richtig, da ja die in Abb. 3 nicht gezeichnete schneidende Versetzung eine Unsymmetrie hereinbringt. Ihre Berücksichtigung ist jedoch wegen der heute noch nicht genügend genau bekannten Struktur des Versetzungszentrums nicht auf einfache Weise mög-

<sup>22</sup> Herrn Dipl.-Phys. G. Schöck habe ich für fruchtbare Diskussionen zu den hier behandelten Fragen zu danken.

lich. Immerhin sollte durch unsere Rechnung zumindest die Größenordnung richtig wiedergegeben werden.

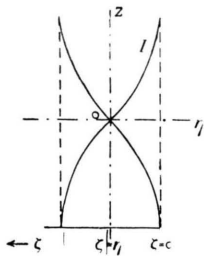


Abb. 3. Schema der Versetzungsstruktur einer in Halbversetzungen dissoziierten Versetzungslinie beim Schneiden mit einer zweiten Versetzung (vgl. Abb. 2).

Die Form des in Abb. 3 mit I bezeichneten Zweigs der Versetzung werde durch eine Funktion

$$z = z(\zeta) \quad (\text{B } 1)$$

beschrieben; seine potentielle Energie pro Längeneinheit als Funktion von  $\zeta$  bzw.  $\eta$  wird näherungsweise als

$$E(\eta)/2 \quad (\text{B } 2)$$

angesetzt (siehe Abschnitt 1). Unter den oben gemachten Annahmen ergibt sich mit Gl. (7)

$$\frac{1}{2} E_L \left( \frac{\partial \zeta}{\partial z} \right)^2 = \frac{1}{2} f(\zeta), \quad (\text{B } 3)$$

woraus

$$z(\zeta) = -\sqrt{E_L} \int_{\zeta=\eta_0}^{\zeta} \frac{d\zeta}{\sqrt{f(\zeta)}} \quad (\text{B } 4)$$

$$= \sqrt{\frac{E}{C}} \eta_0 \left\{ \Re \Im \left[ \frac{B\zeta + C\eta_0}{\zeta \sqrt{-\Delta}} \right] - \Re \Im \left[ \frac{B+C}{\sqrt{-\Delta}} \right] \right\}$$

folgt mit

$$\Delta = AC - B^2. \quad (\text{B } 5)$$

Löst man (B 4) nach  $\zeta$  auf, so ergibt sich

$$\zeta = \eta_0 \frac{C}{\sqrt{-\Delta} \Im \left[ \left\{ \frac{|z|}{\eta_0} \sqrt{\frac{C}{E_L}} + \Re \Im \left[ \frac{B+C}{\sqrt{-\Delta}} \right] \right\} - B \right]} \quad (\Delta < 0) \quad (\text{B } 6a)$$

bzw.

$$\zeta = \eta_0 \frac{C}{\sqrt{\Delta} \Im \left[ \left\{ \frac{|z|}{\eta_0} \sqrt{\frac{C}{E_L}} + \Re \Im \left[ \frac{B+C}{\sqrt{\Delta}} \right] \right\} - B \right]} \quad (\Delta > 0). \quad (\text{B } 6b)$$

Für große  $z$  gilt in beiden Fällen

$$\zeta = \eta_0 \exp \left( -\frac{|z|}{\eta_0} \sqrt{C/E_L} \right) \Gamma, \quad (\text{B } 7)$$

$$\Gamma = \frac{2C}{B+C+\sqrt{A+2B+C}\sqrt{C}}. \quad (\text{B } 8)$$

Die Abweichung des Faktors  $\Gamma$  von 1 (siehe Tab. 6) ist ein Maß für die Abweichung der Form der Versetzungslinie von einer Exponentialkurve.

	Cu		Al	
	(Sch)	(St)	(Sch)	(St)
$E/\sqrt{E_L}$	3,4	7,9	0,16	0,24
$\Gamma$	0,545	0,453	1,48	1,05

Tab. 6.  $E/\sqrt{E_L}$  nach Gl. (B 9) in  $[10^{-10} \text{ dyn}^{1/2} \text{ cm}]$ ,  $\Gamma$  nach Gl. (B 8).

Der Beitrag  $E$  der betrachteten Halbversetzung  $I$  zur Aktivierungsenergie ergibt sich in der hier benützten Näherung zu

$$E = \frac{1}{2} \int_0^\infty \left\{ E_L \left( \frac{\partial \zeta}{\partial z} \right)^2 + f(\zeta(z)) \right\} dz = \int_{\zeta=\eta_0}^{\zeta=0} f(\zeta) \frac{dz}{d\zeta} d\zeta = \sqrt{E_L} \int_{\zeta=0}^{\zeta=\eta_0} \sqrt{f(\zeta)} d\zeta \quad (\text{B } 9a)$$

$$= -\frac{\sqrt{E_L} \eta_0}{A^2 \sqrt{-\Delta}} \left\{ \frac{(\alpha^2 - \beta^2)^{3/2} + AC \sqrt{-AC}}{3} + \frac{B}{2} \left[ \beta \sqrt{\alpha^2 - \beta^2} - B \sqrt{-AC} + \alpha^2 \left( \arcsin \frac{\beta}{\alpha} - \arcsin \frac{B}{\alpha} \right) \right] \right\}$$

$$= \frac{\sqrt{E_L} \eta_0}{A^2 \sqrt{\Delta}} \left\{ \frac{(\alpha^2 + \beta^2)^{3/2} - AC \sqrt{AC}}{3} - \frac{B}{2} \left[ \beta \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} - B \sqrt{AC} - \alpha^2 \left( \Re \Im \left[ \frac{\beta}{\alpha'} \right] - \Re \Im \left[ \frac{B}{\alpha'} \right] \right) \right] \right\} \quad (\text{B } 9b)$$

mit

$$\alpha^2 = -\alpha'^2 = B^2 - AC = -\Delta, \quad (\text{B } 10)$$

$$\beta = \frac{1}{2} \eta_0 f'(\eta_0) - f(\eta_0). \quad (\text{B } 11)$$

Die Linienenergie  $E_L$  setzt sich aus zwei Anteilen zusammen, nämlich einem von der Gesamtanordnung der Versetzungen bestimmten, im elastischen Spannungsfeld der Versetzungen enthaltenen Anteil  $E_{el}$  und einem von der Geometrie des Verlaufs der Versetzungslinien wenig abhängenden, im Zentrum der Versetzung konzentrierten Energiebetrag. Im Sinne des Peierlschen Modells setzen wir diesen Beitrag gleich der in Abschnitt 1 und Anhang A benützten Energie  $E_{AB}$ .

Beim Aluminium vermag sich wegen der geringen Aufspaltung kein weitreichendes zusätzliches Span-

nungsfeld beim Zusammenbiegen auszubilden. Wir be- gehen sicher nur einen im Rahmen der Ungenauigkeit der gesamten Rechnung liegenden Fehler, wenn wir hier  $E_{el}$  vernachlässigen und

$$E_L = E_{AB} \quad (\text{B } 12)$$

setzen. Wir berücksichtigen ferner nicht, daß sich der Charakter der Versetzungslinien beim Zusammenbiegen etwas ändert und nehmen an (was wegen der Überlappung der Halbversetzungen ebenfalls nicht streng richtig ist), daß der Burgers-Vektor  $b^*$  einer Halbversetzung die Länge

$$b^* = b/\sqrt{3} \quad (\text{B } 13)$$

hat. Es ergibt sich dann

$$E_L = b^{*2}/4\pi K_2 = b^2/12\pi K_2. \quad (\text{B } 14)$$

Mit den Zahlenwerten von Tab. 2 und 6 erhält man für eine Schraubenversetzung

$$E = 3,8 \cdot 10^{-14} \text{ erg} = 0,024 \text{ eV}; \quad (\text{B } 15 \text{ a})$$

für eine Stufenversetzung

$$E = 7,1 \cdot 10^{-14} \text{ erg} = 0,045 \text{ eV}. \quad (\text{B } 15 \text{ b})$$

Der zusätzliche Energiebetrag, der pro vollständige Versetzungslinie infolge der Aufspaltung beim Kreuzen zusätzlich aufgewendet werden muß, beträgt das Vierfache der in Gl. (B 15) angegebenen Zahlenwerte.

Im Falle des Kupfers kann  $E_{el}$  nicht mehr vernachlässigt werden. Zur Berücksichtigung von  $E_{el}$  bieten sich vor allem zwei Wege an:

1. In einer „self-consistent“-Methode wird die elastische Energie für die unter der Annahme einer konstanten Linienspannung erhaltene Form der Versetzungslinie berechnet und aus der Gesamtenergie und der zugehörigen Verlängerung der Versetzung die Linienenergie  $E_L$  bestimmt. Auf diese Weise erhält man eine transzendente Gleichung für  $E_L$ . — Im vorliegenden Falle wurde dieses Verfahren nicht auf Gl. (B 6), sondern zur Vermeidung mathematischer Schwierigkeiten nur auf die Näherungsgleichung (B 7) mit  $\Gamma=1$  angewandt.

2. Es wird auf die Verwendung der „Saiten-Näherung“ und damit auf die Einführung einer konstanten Linienenergie  $E_L$  verzichtet und statt dessen ein

Variationsverfahren benutzt<sup>23</sup>. Man setzt für die Gestalt der Versetzungslinie eine plausible analytische Form mit freien Parametern an und macht die Gesamtenergie durch Variation dieser Parameter zum Minimum.

Mit Hilfe des an zweiter Stelle genannten Verfahrens hat Schöck<sup>23</sup> folgende Werte für die zum Zusammenbiegen einer vollständigen Versetzung notwendigen Energien erhalten:

$$\begin{array}{ll} \text{Al Schraubenversetzung} & 4 E = 0,106 \text{ eV}, \\ \text{Al Stufenversetzung} & 4 E = 0,21 \text{ eV}, \\ \text{Cu Schraubenversetzung} & 4 E = 0,84 \text{ eV}, \\ \text{Cu Stufenversetzung} & 4 E = 3,9 \text{ eV}. \end{array} \quad (\text{B } 16)$$

Die Werte für Al sind in guter Übereinstimmung mit den oben mit Hilfe der Saiten-Näherung erhaltenen. Dagegen liegen die Energien für Cu nach Gl. (B 16) bedeutend niedriger als die nach 1. berechneten Zahlenwerte. Diese ergeben sich deswegen zu groß, weil durch die Annahme  $\Gamma=1$  die Ausdehnung der Versetzung und damit die elastische Energie überschätzt wird. Es ist anzunehmen, daß eine Berechnung nach 1. an Hand der genaueren Gleichungen (B 6) bessere Übereinstimmung mit dem Variationsverfahren geben würde.

Die physikalischen Konsequenzen des in Gl. (B 16) zum Ausdruck kommenden Unterschiedes zwischen Kupfer und Aluminium werden in Abschnitt 3 diskutiert.

<sup>23</sup> G. Schöck, Dissertation Stuttgart 1954. S. a. G. Schöck u. A. Seeger, Activation Energy Pro-

blems Associated with Extended Dislocations (Conference on Defects in Crystalline Solids, Bristol 1954).